$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ φθίνουσα, Τότε $\int_1^\infty f(x)dx$ συγκλίνει αν-ν $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ συγκλίνει

Αποδ

Έστω $t>1$, τότε η f είναι ολ/μη στο $[1,t]$ ως μονότονη.
Για $n \in \mathbb{N}$, $f(2)+ \ldots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1)+ \ldots + f(n-1)$.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ τ.ω f να είναι ολ/μη στο $[a,t]$ $\forall t>a$, τότε $\int_a^\infty f(x)dx = +\infty$ ή $\int_a^\infty f(x)dx$ συγκλίνει.

$\Leftarrow$ $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ φραγμένη συνάρτηση στο $[a,+\infty)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=1}^\infty f(k)$

$\Rightarrow$ Αν $F(t) = \int_1^t f(x)dx$ τότε, $S_n - f(1) \leq F(n) \leq S_n - 1$

Επειδή η $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ είναι σειρά μη αρνητικών όρων, η σειρά συγκλίνει αν-ν η $\{S_n\}$ φραγμένη.

• Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει $\Rightarrow \exists M>0$, τ.ω $s_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow F(n) \leq M \ \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{F \text{ αύξουσα}} F(t) \leq F([t]+1) \leq M$.

$\Rightarrow F$ φραγμένη $\xrightarrow{\text{πρόταση}} \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

• Έστω ότι $\int_1^{\infty} f(x)dx$ συγκλίνει $\Rightarrow F(t)$ φραγμένη $\Rightarrow \exists k>0$.

τ.ω $F(t) \leq k$, $\forall t \geq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $F(n) \leq k \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $s_n \leq F(n) + F(1) \leq k + F(1)$

$\Rightarrow \{s_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει.

ΠΟΡΙΣΜΑ Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ και έστω $a \in \mathbb{R}$ φθίνουσα. Τότε, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ συγκλίνει αν-ν $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει

<u>Αποδ</u>

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} f(x)\,dx + \underbrace{\int_a^{1} f(x)dx}_{= L} \Big\} \in \mathbb{R}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \int_1^{t} f(x)\,dx + L.$$

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ συγκλίνει αν-ν $\lim_{t\to\infty} \int_1^{t} f(x)dx$ υπάρχει $\iff$ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

Εφαρμογή $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ συγκλίνει αν-ν $p>1$.

...οδ. Η συνάρτηση $f: R \to R_+$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^p} & , x \geq 1 \\ \text{"οτιδήποτε"} & , x < 1. \end{cases} \quad \text{π.χ. } 1/..$$

...ίναι φθίνουσα, άρα $\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$

...γκλίνει αν-ν $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει αν-ν $p > 1$.

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα Τύπου ΙΙ

$f: [a,b) \to R$ ($f: (a,b] \to R$) τ.ω η f να είναι ολ/μη στο $[a,t]$ (αντ. στο $[t,b]$) $\forall$ $a < t < b$. Ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx. \text{ (αν υπάρχει το όριο)}$$

$$\left(\text{αντ. } \int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx. \quad (-\text{"}-)\right)$$

Παράδειγμα

$f: (0,1] \to R$ με τύπο $f(x) = 1/2\sqrt{x}$ Ld-φραγμένη

$$\lim_{t \to 0^+} \int_t^1 f(x)dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \lim_{t \to 0^+} \left[\sqrt{x}\right]_t^1 = \lim_{t \to 0^+} (1 - \sqrt{t}) = 1$$

-Άρα, $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 1$, συγκλίνει.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει αν-ν το όριο υπάρχει αλλιώς αποκλίνει.

$f:(a,b)\to \mathbb{R}$, τω $\forall\, a<s<t<b$, η f είναι ολ/λη στο $[s,t]$

Ορίζουμε $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, όπου $c\in(a,b)$

• Αν $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ συγκλίνουν, λέμε ότι $\int_a^b f(x)dx$ συγκλίνει, αλλιώς λέμε ότι $\int_a^b f(x)dx$ αποκλίνει

• Αν υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx, \dots, \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx$ όπου $-\infty \le c_1 < c_2 < \dots < c_n \le \infty$, ορίζουμε

$\int_{c_1}^{c_n} f(x)dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \dots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx$

$\int_{c_1}^{c_n} f(x)dx$ συγκλίνει αν-ν $\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx$. συγκλίνει $\forall i\in\{2,\dots,n\}$

$\boxed{\text{Παραδείγματα}}$ ① $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim\limits_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln x\,dx = -1$, συγκλίνει

$\int_t^1 \ln x\,dx = \int_t^1 x'\ln x\,dx = [x\ln x]_t^1 - \int_t^1 x(\ln x)'dx \xrightarrow{t\to 0^+} -1$

$= -t\ln t - \int_t^1 dx = -t\ln t - (1-t) = t - t\ln t - 1$

$\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t}\left(\frac{-\infty}{\infty}\right) \overset{L'Hospital}{=} \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{(\ln t)'}{\left(\frac{1}{t}\right)'} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-1/t^2} = 0$

② $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = \lim\limits_{t\to 2^+}\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx = \lim\limits_{t\to 2^+}[2\sqrt{x-2}]_2^5 = 2\sqrt{3}$

μη-φραγμένη

συγκλίνει.

③ $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ Η συνάρτηση $\frac{1}{x-1}$ είναι ολ/λη στο $[0,t]$ $\forall\, 0<t<1$

" " " " στο $[t,3]$ $\forall\, 1<t<3$.

Άρα, $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}}$

γενικευμένο γενικευμένα

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t (\ln|x-1|)'\,dx = \lim_{t\to 1^-} [\ln|x-1|]_0^t$$

$$= \lim_{t\to 1^-} (\ln|t-1| - \cancel{\ln 1}^{\,0}) = -\infty,$$ αποκλίνει.

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες σε κάποιο κλειστό διάστημα I ($I=[a,b]$ ή $I=(-\infty,a]$ ή $I=[a,+\infty)$ ή $I=\mathbb{R}$) και $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \in I$.

Αν $\int_I g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε $\int_I f(x)\,dx$ συγκλίνει.

(Κριτήριο σύγκρισης). Αν $\int_I f(x)\,dx$ αποκλίνει, τότε $\int_I g(x)\,dx$ αποκλίνει.

$\boxed{\text{Παραδείγματα}}$ 1

γνήσιο γενικευμένο

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

Άρα, $\int_0^\infty e^{-x^2}$ συγκλίνει αν-ν $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ συγκλίνει.

$\forall x \ge 1 \quad x^2 \ge x \Rightarrow -x^2 \le -x \Rightarrow e^{-x^2} \le e^{-x} \xRightarrow[I=[1,+\infty)]{\text{Κρ. Σύγκρισης}}$

Αν $\int_1^\infty e^{-x}dx$ συγκλίνει, τότε $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ συγκλίνει

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}[-e^{-x}]_1^t = \lim_{t\to+\infty}(-e^{-t}+e) = e,$$

συγκλίνει

② $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$

$\frac{1+e^{-x}}{x} \geq \frac{1}{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 1$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} [\ln|x|]_1^t = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \cancel{\ln 1}) = +\infty$, αποκλίνει.

Έστω $p(x)$ πολυώνυμο βαθμού n, $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$

$p(x) = p(x - x_0) \overset{y = x - x_0}{=\!=} p(y + x_0)$ πολυώνυμο βαθμού n

ως προς y $\xRightarrow{\text{pw}} p(y+x_0) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_n y^n =$

$= b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots + b_n(x-x_0)^n$

μορφή του $p(x)$ με κέντρο το $x_0 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$ Έστω $p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x-x_0)^n$

- $p(x_0) = b_0$

$p'(x) = b_1 + 2b_2(x-x_0) + 3b_3(x-x_0)^2 + \ldots + n b_n (x-x_0)^{n-1}$

- $p'(x_0) = b_1$

$p''(x) = 2b_2 + 3\cdot 2 b_3 (x-x_0) + 4\cdot 3 b_4 (x-x_0)^2 + \ldots + n(n-1) b_n (x-x_0)^{n-2}$

$p''(x) = 2b_2$

$p'''(x) = 3\cdot 2 b_3 + 4\cdot 3\cdot 2 b_4 (x-x_0) + \ldots + n(n-1)(n-2) b_n (x-x_0)^{n-3}$

- $p^{(n)}(x_0) = n(n-1)\ldots 2 b_n$

$\Downarrow$

$p^{(k)}(x_0) = k(k-1)\ldots 2 b_k \Rightarrow$	$\frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} = b_k$

, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$p^{(n+1)}(x_0) = 0 = b_{n+1}$

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ (η διάστημα) άπειρες φορές παραγωγίσιμη

Θέλουμε να προσεγγίσουμε την f από πολυώνυμα των οποίων η μορφή έχει κέντρο το x_0

<u>Ξέρουμε</u>: $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ στο I

Αν $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ (n-οστό άθροισμα της δυναμοσειράς)

τότε $\underset{\text{αν συγκλίνει}}{T_n(x)} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = f(x)$

Αν η δυναμοσειρά παραγωγίζεται όρο προς όρο ($\forall$ τάξης παράγωγο) τότε, όπως πριν, θα είχαμε $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Τότε, $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)$

$$\|$$

$T_{n,f}(x) = T_{n,f,x_0}(x) \to$ πολυώνυμο Taylor τάξης n της f και $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ σειρά Taylor της $f(x)$ με κέντρο το x_0. Αν $x_0=0$: Πολυώνυμο McLaurin τάξης n και σειρά McLaurin της f

16.05.2019

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, άπειρες φορές παραγωγίσιμη

Πολυώνυμο Taylor τάξης n: $T_n(x) = T_{n,x_0}(x) = T_{n,x_0,f}(x)$ (*)

με κέντρο x_0 $= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$$f(x) \overset{?}{=\!=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \left(f(x) - T_{n,x_0}(x) \right)$$

Υπόλοιπο Taylor. $R_n(x) = R_{n,x_0}(x) = R_{n,x_0,f}(x) = f(x) - T_n(x)$.

Αν για κάποιο x, $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ τότε $T_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

(για το συγκεκριμένο x)

Άρα το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

ισούται με » » » $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

1) $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, \dots, n$

2) $R'_{n,x_0,f}(x) = R_{n-1,x_0,f'}(x)$

Αποδ

$$R'_{n,x_0,f}(x) = \left[f(x) - T_{n,x_0,f}(x) \right]' = f'(x)$$

$$= f'(x) - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right]' = f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k (x-x_0)^{k-1}$$

$$= f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}$$

$$f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$= f'(x) - T_{n-1,x_0,f'}(x) = R_{n-1,x_0,f'}(x).$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ ① Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$, f $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ κ' n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{n,x_0,f}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Αποδ

Με επαγωγή πάνω στο n

Για $n=1$ $\quad R_{1,x_0,f}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$

$$= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0).$$

$$\Longrightarrow \frac{R_{1,x_0,f}(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \xrightarrow{x\to x_0} f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Έστω ότι ισχύει για $n=m$ Θδο ισχύει για $n=m+1$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{m+1,x_0,f}(x)}{(x-x_0)^{m+1}} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{R'_{m+1,x_0,f}(x)}{(m+1)(x-x_0)^m} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{m,x_0,f'}(x)}{m(x-x_0)^m} \underset{\text{επαγωγής}}{\overset{\text{Υπόθεση}}{=}} 0$$

$\boxed{\text{Λήμμα}}$ Έστω $p(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ τω $\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Τότε $p(x) \equiv 0$.

Αποδ Με επαγωγή πάνω στο n.

Αν $n=0 \Longrightarrow p(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$ κ' αν

$$\lim_{x\to x_0} \frac{c}{(x-x_0)^0} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow p(x) \equiv 0$$

Εστω ότι ισχύει για $n=m$ θδο ισχύει για $n=m+1$.

Εστω ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{(x-x_0)^{m+1}} = 0 \xRightarrow{\lim\limits_{x\to x_0} p(x)=0}$

$\xRightarrow{\text{L'Hospital}} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P'(x)}{[(x-x_0)^{m+1}]'} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P'(x)}{(x-x_0)^{m}} = 0$

$\xRightarrow[\deg p(x)\leq m]{\text{επαγωγή}} p(x)\equiv 0$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ Εστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x_0\in[a,b]$. Εστω ότι η f είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και n φορές στο x_0. Τότε, το πολυώνυμο Taylor τάξης n με κέντρο x_0 της f $T_{n,x_0,f}$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού $\leq n$ με την ιδιότητα $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ $(*)$

Αποδ

Αν $T(x) = T_{n,x_0,f}(x)$, τότε $f(x)-T(x) = R_{n,x_0,f}(x)$ και ισχύει η $(*)$ απο πρόταση 1. Θδο το $T_{n,x_0,f}(x)$ είναι μοναδικό.

Εστω T_1, T_2 πολυώνυμα βαθμού $\leq n$ που ικανοποιούν την $(*) \Rightarrow \deg(T_1-T_2)\leq n \rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{T_1(x)-T_2(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \xrightarrow{\text{Λήμμα}}$

$T_1(x)-T_2(x) \equiv 0 \Rightarrow T_1(x) = T_2(x)$

Παράδειγμα Να βρεθεί το πολυώνυμο McLaurin τάξης n της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $|x|<1$

$T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ $\qquad f^{(0)}(0)=1$

$f^{(1)}(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f^{(1)}(0) = 1$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f^{(2)}(0) = 2$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad , \quad |x| < 1$$

$$T_n(x) \overset{?}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - (1 + x + \dots + x^n)}{(x-0)^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0 \xRightarrow{\Theta} 1 + x + \dots + x^n = T_{n,0,f}(x) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \text{αν-ν} \quad R_{n,x_0,f}(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$ (Taylor). Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $n+1$ φορές παραγωγίσιμη και έστω $x_0 \in [a,b]$. Τότε,

$$\boxed{R_{n,x_0,f}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt}$$

← ολοκληρωτικός τύπος του Taylor

*

Αποδ Σταθεροποιούμε $x, x_0 \in [a,b]$. Θέτουμε,

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k = R_{n,t,f}(x)$$

$$\varphi'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(-k)(x-t)^{k-1}$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$$

$$= -f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} - \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \right)$$

Τηλεσκοπικό $-f'(t) + \cancel{f'(t)} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n = -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}$

$* = -\int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\,dt = (\underset{R_{n,x,f}(x)=0}{\varphi(x)} - \varphi(x_0)) = -(-\varphi(x_0)) = \varphi(x_0) = R_{n,x_0,f}(x)$

$\varphi(t) = R_{n,f,t}(x) \qquad \varphi(x) = 0$

20.05.2019

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n,x_0,f}(x)}$$

$x_0 \in I$

f γραμμένη ως

δυναμοσειρά

$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n = \sum_{k=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$

Παράδειγμα

$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0$

$f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x \quad \dots \quad f^{(k)}(x) = e^x$

$f^{(k)}(0) = 1$

$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

(Lagrange) ξ μεταξύ x, x_0.

$$\boxed{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(s)(x-s)^n\,dx}$$

(ολοκλ.)

$e^x = T_n(x) + R_n(x).$

$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = e^{\xi} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{y_n}$$

Είναι $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \dfrac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = \dfrac{|x|^{n+2}}{n+2} \longrightarrow 0$

απο οριακό κριτήριο λόγου $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $x \in R$

Επομένως, $\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad x \in R}$

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}}_{R_n(x) \to 0} \qquad e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$$

$$\frac{p}{q} = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \qquad p, q \in N$$

$$\underbrace{\frac{p}{q} n! = n! + \frac{n!}{2!} + \dots + 1}_{\in N} + \frac{e^{\xi}}{n+1} \in [0,1] \quad \text{άτοπο}$$

→ Πως να κάνεις ανάπτυγμα του Taylor γύρω απο το $x_0 = 1$.

$p(x) = x^2 - 5x + 6$, $x_0 = 1$

$p'(x) = 2x - 5$

$p''(x) = 2$ $\qquad p(1) = -2$

$p'''(x) = 0$ $\qquad p'(1) = -3$

$\vdots$

$p^{n}(x) = 0$ $\qquad p''(1) = 2$

$$P(x) = -2 + \frac{-3}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2$$

1ος τρόπος

2ος τρόπος

$p(x) = (x-1+1)^2 - 5(x-1+1)+6$

$= (x-1)^2 + 2(x-1) - 5(x-1) - 5 + 6 = (x-1)^2 - 3(x-1) + 2$

(*) $\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R}$

Έτσι $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ επομένως

$e^x + e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\quad e^x - e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\shortparallel$

$(\sinh x)$

Παρατήρηση αν $f: I \to R$ με I συμμετρικό ως προς το 0, τότε

$f = f^+ + f^-$ όπου $f^+(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, $f^-(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

είναι f^+: άρτια, f^-: περιττή

π.χ. $e^x = \underbrace{\cosh x}_{\text{άρτια}} + \underbrace{\sinh x}_{\text{περιττή}}$.

ΑΣΚΗΣΗ $f(x) = \cos x$, $x \in R$

$f'(x) = -\sin x$ $\quad f''(x) = -\cos x$ $\quad f'''(x) = \sin x$ $\quad f^{(4)}(x) = \cos x$.

$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x \quad , k=0,\dots \qquad f^{(2k)}(0) = (-1)^k \quad , k=0\dots$

$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x \quad , k=0\dots \qquad f^{(2k+1)}(0) = 0$

$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} (x-x_0)^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$|R_{2n}(x)| = \left| \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} (x-x_0)^{2n+1} \right| = \frac{|f^{(2n+1)}(\xi)|}{(2n+1)!} |x|^{2n+1}$$

$$\le \frac{|x|^n}{(2n+1)!} \leftarrow y_n$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{|x|^{n+1} (2n+1)!}{(2n+3)! \; |x|^n} = \frac{|x|}{(2n+2)(2n+3)} \to 0$$

$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα,

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , x \in \mathbb{R}}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\cos \xi^{(2n+1)}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

≤ 1

$f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1,1)$, $x_0 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = (-1)(1+x)^{-2}$

$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$ $f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$

$f^{(k)}(x) = \underbrace{(-1)(-2)\ldots(-(k-1))}(1+x)^{-k}$ $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(x+1)^{-k}$ (*)

$(-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}$ $x \in (-1,1)$, $k = 1, 2, \ldots$

$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!}x^k$

(*) $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ $= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k$

$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$

$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{n!}\int_0^{x_0} f^{(n+1)}(s)(x-s)^n\,ds\right| \leq \frac{1}{n!}\left|\int_0^{x} (-1)^n n!\,(s+1)^{-n-1}(x-s)^n\,ds\right|$

$= \frac{n!}{n!}\left|\int_0^x \left(\frac{x-s}{s+1}\right)^n \frac{1}{s+1}\,ds\right|$ $\frac{du}{ds} = \frac{-(s+1)-(x-s)}{(s+1)^2} = \frac{-s-1-x+s}{(s+1)^2}$

$= -\frac{x+1}{(s+1)^2}$ (*)

θέτω $u = \frac{x-s}{s+1}$

$u+1 = \frac{x-s}{s+1}+1 = \frac{x-s+s+1}{s+1} = \frac{x+1}{s+1}$ (**)

$\frac{du}{ds} = -\frac{u+1}{s+1}$

$=$

$-\frac{du}{u+1} = \frac{ds}{s+1}$

$$|R_n(x)| \le \left| \int_x^0 u^n \left(\frac{-du}{u+1} \right) \right| = \left| \int_0^x \frac{u^n}{u+1} du \right|$$

(i) $0 < x < 1$

$$|R_n(x)| \le \int_0^x \frac{u^n}{u+1} du \le \int_0^x u^n du = \left. \frac{u^{n+1}}{n+1} \right|_0^x = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0$$

(ii) $-1 < x < 0$

$$R_n(x) \le \int_x^0 \frac{|u|^n}{u+1} du \le \int_x^0 \frac{|u|^n}{x+1} du = \frac{1}{x+1} \int_x^0 |u|^n du$$

$$= \frac{1}{(x+1)} \frac{|u|^{n+1}}{n+1} \longrightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \qquad x \in (-1, 1]$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$f(x) = \operatorname{Arctan} x \quad , x \in (-1, 1) \qquad \operatorname{Arctan} x = \int_0^x \frac{1}{1+s^2}$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)(-2x)}{(1+x^2)^4}$

$f^{(n)}(x) \qquad \frac{1 - s^{n+1}}{1-s} = 1 + s + \quad + s^n \qquad |s| < 1$

$$\frac{1}{1-s} = 1 + s + \quad + s^n + \frac{s^{n+1}}{1-s}$$

$$\frac{1}{1+s} = 1 - s + \quad + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1} s^{n+1}}{1+s}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+s^2} \quad \int_0^x 1-s^2+\dots+(-1)^n s^{2n} + \int_0^x \frac{(-1)\ s^{2n+2}}{1+s^2} \quad \text{Sumiran das}$$

$$\text{Arctan}x = \underbrace{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}_{P_n(x)} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{s^{2n+2}}{1+s^2}\, ds$$

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{s^{2n+2}}{1+s^2}\, ds \right|$$

$\underline{0<x<1}$: $$\int_0^x \frac{s^{2n+2}}{1+s^2}\, ds \le \int_0^x (s^{2n+2})\, ds = \frac{s^{2n+3}}{2n+3}\Big|_0^x$$

$$= \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\Big|_0^x$$

$$\text{Arctan}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1)$$

$$\frac{\pi}{4} = \underbrace{\text{Arctan}\frac{1}{2}}_{\theta_1} + \underbrace{\text{Arctan}\frac{1}{3}}_{\theta_2} \qquad \tan\theta_1 = \frac{1}{2} \qquad \tan\theta_2 = \frac{1}{3}$$

$$\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{+1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1$$

$$\frac{\pi}{4} = \theta_1+\theta_2 \qquad \pi = 4\,(\text{Arctan}\,1/2 + \text{Arctan}\,1/3)$$

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1/2)^{2n+1} + (1/3)^{3n+1}}{2n+1}$$

$$\lim_{t\to\infty} = \left(-t^{k+1} e^{-t} + (k-1)\int_0^t x^k e^{-x}\, dx \right)$$

$$= (k+1)\int_0^{\infty} x^k e^{-x}\, dx \ \underset{\text{Επαγωγής}}{\overset{\text{Υπ.}}{=\!=\!=}} \ (k+1)\, k! = (k+1)!$$

---

③ a) $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{\cos u}{u}\, 2u\, du = 2\int \cos u\, du$

$u = \sqrt{x}$ $\qquad = 2\sin u + c$

$du = 1/2\sqrt{x}\, dx$ $\qquad = 2\sin(\sqrt{x}) + c$

$\Rightarrow du = \frac{1}{2u}\, dx$

$\Rightarrow dx = 2u\, du$

b) $\int \cos^4 x\, dx$

γ) $\int \cos^3 x \sin^4 x\, dx = \int \cos^2 x \sin^4 x \cos x\, dx$

$= \int (1-\sin^2 x)\sin^4 x \cos x\, dx \ \underset{du = \cos x dx}{\overset{u = \sin x}{=\!=\!=}} \ \int (1-u^2)u^4\, du =$

$= \int (u^4 - u^6)\, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$

δ) $\int x\cos x\, dx = \int x(\sin x)'\, dx = x\sin x - \int x' \sin x\, dx$

$= x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + c$

---

④ β) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\, dx$ $\qquad \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)' = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$x = \frac{2}{\cos\theta}$ $\qquad \sqrt{x^2-4} = 2\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}} = 2\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = 2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$dx = 2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$$\Rightarrow 2k\, I_{k+1} = \frac{y}{(y^2+1)^k} + (2k-1)\, I_k.$$

---

(11) NΔO $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Λύση επαγωγή πάνω στο n : $n=0$: $\int_0^\infty e^{-x}\,dx =$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty} (1-e^{-t}) = 1$$

(ισχύει)

Έστω ότι ισχύει για $n=k$: $\int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx = k!$

Αρκεί νδο $\int_0^\infty x^{k+1} e^{-x}\,dx = (k+1)!$
$(n=k+1)$

$$\int_0^t x^{k+1} e^{-x}\,dx = \int_0^t x^{k+1}(-e^{-x})'\,dx = \left[-x^{k+1}e^{-x}\right]_0^t$$

$$-\int_0^t (x^{k+1})'(-e^{-x})\,dx = -t^{k+1}e^{-t} + (k+1)\int_0^t x^k e^{-x}\,dx.$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{k+1}}{e^t} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \xrightarrow{\text{L'Hosp}} \lim_{t\to\infty} \frac{(k+1)\,t^k}{e^t} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(k+1)k\,t^{k-1}}{e^t} = \dots = \lim_{t\to\infty} \frac{(k+1)k(k-1)\cdots 1\cdot t^0}{e^t} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty x^{k+1} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t x^{k+1} e^{-x}\,dx =$$

② $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, συνεχής κ' $F:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής με

τύπο $F(x)=\int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)dt$ $F'(x)=;$

<u>Λύση</u>

θέτω $t=\frac{x}{s} \Longrightarrow dt=-\frac{x}{s^2}\,ds$

$t=s \Longrightarrow s=1$

$t=1 \Longrightarrow s=x$

$$F(x)=\int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)dt=\int_x^1 f(s)\frac{-x}{s^2}\,ds=x\int_1^x\frac{f(s)}{s^2}\,ds$$

$$\Longrightarrow \boxed{F'(x)=\int_1^x\frac{f(s)}{s^2}\,ds+x\,\frac{f(x)}{x^2}}$$

---

⑥ $I_k=\int\frac{dy}{(y^2+1)^k}$, νδο $I_{k+1}=\frac{1}{2k}\frac{y}{(y^2+1)^k}+\frac{2k-1}{2k}I_k$

$$I_k=\int\frac{y'}{(y^2+1)^k}dy=\frac{y}{(y^2+1)^k}-k\int y\,\frac{-2y\,(y^2+1)^{k-1}}{(y^2+1)^{2k}}dy$$

$$=\frac{y}{(y^2+1)^k}+\int\frac{2y^2}{(y^2+1)^{k+1}}dy=\frac{y}{(y^2+1)^k}+2k\left[\int\frac{y^2+1}{(y^2+1)^{k+1}}dy\right.$$

$$\left.-\int\frac{1}{(y^2+1)^{k+1}}dy\right]$$

$$\Longrightarrow I_k=\frac{y}{(y^2+1)^k}+2k\,I_k-2k\,I_{k+1}$$

① Φυλ. 4

30.05.2019

$f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ ολοκληρώσιμη. ΝΔΟ $\forall n\in\mathbb{N}$,
$\exists\ a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f=\frac{\int_a^b f}{n},\quad k=0,1,\dots,n-1.$$

<u>Λύση</u> Με επαγωγή στο n. Για $n=1$ ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για $n=k$, δηλ. $\exists\ a=t_0<t_1<\dots<t_i=b$,
τ.ω $$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f=\frac{\int_a^b f}{i},\quad k=0,1,\dots,i-1.$$

Για $n=i+1$ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$

$$F(a)=0,\ F(b)=\int_a^b f\geq\frac{\int_a^b f}{i+1}\xrightarrow[\text{τιμής}]{\text{Θ. ενδ.}}\exists\ t_1\in[a,b]$$
$$\underset{\dfrac{\int_a^b f}{i+1}}{\wedge|}\quad \text{τ.ω}\quad F(t_1)=\frac{\int_a^b f}{i+1}$$

Εφαρμόζω υπόθεση επαγωγής για την $f|_{[t_1,b]}:[t_1,b]\to\mathbb{R}_+$.

$\exists\ t_1<t_2<t_3<\dots<t_{i+1}=b$, τ.ω $$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f=\frac{\int_{t_1}^b f}{i}$$

$k=1,2,\dots,i\implies$
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f=\frac{\int_{t_1}^b f}{i}=\frac{\int_a^b f-\int_a^{t_1} f}{i}=\frac{\int_a^b f-\frac{1}{i+1}\int_a^b f}{i}$$

$$=\frac{\frac{i}{i+1}\int_a^b f}{i}=\frac{\int_a^b f}{i+1}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx = \int \frac{2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{2}{\cos\theta}}\, 2\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= 2\int \tan^2\theta\,d\theta = 2\int\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta = 2(\tan\theta-\theta)+c$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}-\theta\right)+c = 2\left(\frac{\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}}{x} - \mathrm{Arsin}\frac{2}{x}\right)+c$$

---

(5) α) $\int e^x \sin x\,dx$, το κάναμε.

$(u^2)'$

β) $$\int \ln(x+\sqrt{x})\,dx \;\underset{\substack{du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ dx=2u\,du}}{\overset{u=\sqrt{x}}{=}}\; \int \ln(u^2+u)\,2u\,du$$

$$= u^2\ln(u^2+u) - \int\left[\ln(u^2+u)\right]' u^2\,du$$

$$= u^2\ln(u^2+u) - \int \frac{2u+1}{u^2+u}u^2\,du = u^2\ln(u^2+u) - \int\frac{2u^2+u}{u+1}\,du$$

$$= u^2\ln(u^2+u) - \left(\int \underbrace{\frac{2u^2+2u}{u+1}}_{=2u}\,du - \int\frac{u}{u+1}\,du\right)$$

$$= u^2\ln(u^2+u) - u^2 + \int\left(1-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$= u^2\ln(u^2+u) - u^2 + u - \ln|u+1| + c.$$

$$= x\ln(x+\sqrt{x}) - x + \sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1) + c$$

$\gamma)$ $\int x\sin^2 x\,dx =$ $\qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos^2 x)$

$= \int x\,\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \int\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos 2x\right)dx$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \quad = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx =$

$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'dx$

$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}\int x'\,\frac{\sin 2x}{2}\,dx$

$= \frac{x^2 - x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c$

---

⑦ β) $\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}\,dx = \int\frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2}\,dx$

$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{\Gamma}{(x+2)^2} \Rightarrow 5x^2+12x+1 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + \Gamma(x-1)$

$\Rightarrow 5x^2+12x+1 = Ax^2 + 4Ax + 4A + Bx^2 + Bx - 2B + \Gamma x - \Gamma$

$5x^2+12x+1 = (A+B)x^2 + (4A+B+\Gamma)x + (4A-2B-\Gamma)$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ 4A+B+\Gamma=12 \\ 4A-2B-\Gamma=1 \end{cases} \Rightarrow A=2,\ B=3,\ \Gamma=1$

$\Rightarrow \int\frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}\,dx = \int\frac{2}{x-1}\,dx + \int\frac{3}{x+2}\,dx + \int\frac{1}{(x+2)^2}\,dx$

$= 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + c$

⑩ γ) $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \ln x\,dx = \lim_{t \to 0^+} [x\ln x - x]_t^1 =$

$\int \ln x\,dx = \int x' \ln x\,dx = x\ln x - \int x(\ln x)'\,dx = x\ln x - x + c$

$= \lim_{t \to 0^+} [x\ln x - x]_t^1$

$= \lim_{t \to 0^+} (1 - 1 - t\ln t + t) = -1$

$\lim_{t \to 0^+} (t \ln t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$